第 3 节 向量的分解与共线性质（★★★）

强化训练

1．（2022 • 新高考 I 卷 • ★）在 ΔABC 中，点 D 在边 AB 上，$BD=2DA$，记 $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{n}$，则 $\overrightarrow{CB}=$（　　）

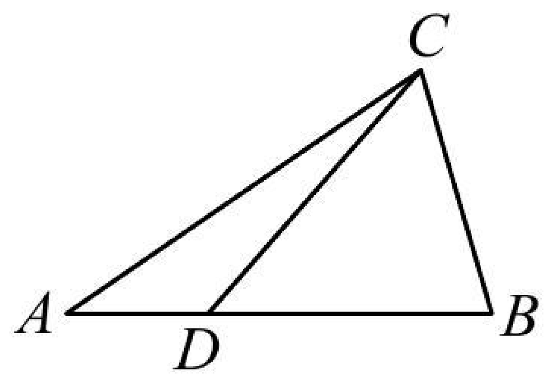
（A）$3\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}$　　（B）$-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$　　（C）$3\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$　　（D）$2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$

答案：B

解法 1：如图，由题意，$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+3(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA})=-2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CD}=-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$.

解法 2：由题意，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，根据内容提要第 2 点的结论②，$\overrightarrow{CD}=(1-\frac{1}{3})\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$，

所以 $\overrightarrow{CB}=-2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CD}=-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$.



2．（2023 • 广东模拟 • ★★）在平行四边形 $ABCD$ 中，E 为 AD 中点，F 为 BE 与 AC 的交点，则 $\overrightarrow{DF}=$（　　）

（A）$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$　　（B）$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$　　（C）$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$　　（D）$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

答案：B

解析：从 D 到 F，与基底 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 关联较强的路径可选 $D\to A\to F$，

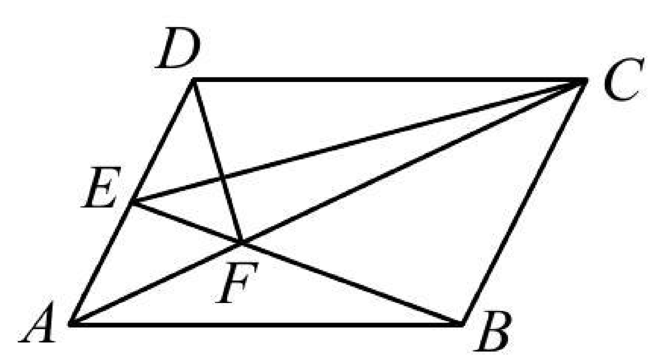
由题意，$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AF}$ ①，

还需把 $\overrightarrow{AF}$ 也用基底表示，先分析 F 在 AC 上的位置，

由图可知 $\Delta AEF\backsim\Delta CBF$，所以 $\frac{AF}{CF}=\frac{AE}{BC}=\frac{1}{2}$，

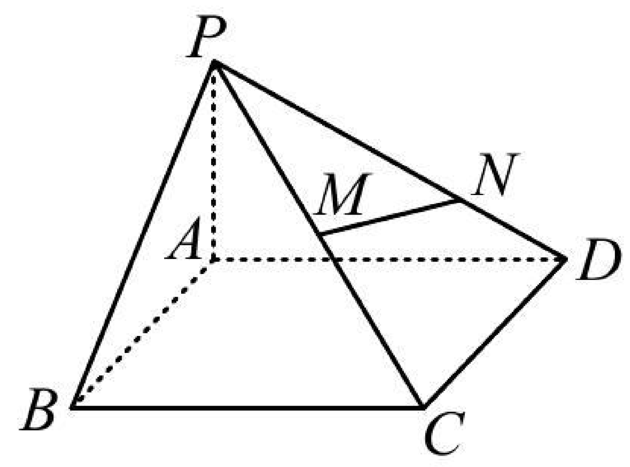
故 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$，

代入①整理得：$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.



3．（2023 • 宁夏银川模拟 • ★★）已知 $ABCD$ 为矩形，P 为平面 $ABCD$ 外一点，M，N 分别为 PC，PD 上的点，$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{PN}=2\overrightarrow{ND}$，若 $\overrightarrow{NM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+z\overrightarrow{AP}$，则 $x+y+z=$（　　）

（A）$-\dfrac{1}{2}$　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）$\dfrac{5}{6}$　　（D）1



答案：B

解析：从 N 到 M，与基向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AP}$ 关联较强的一条路径是 $N\to P\to M$，

由题意，$\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DP}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PC}$

$=\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AD})+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})$

$=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AP}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AP}$，

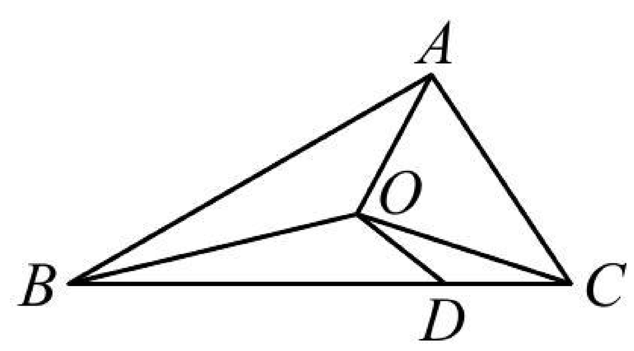
又 $\overrightarrow{NM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+z\overrightarrow{AP}$，所以 $x=\dfrac{1}{2}$，$y=-\dfrac{1}{6}$，$z=\dfrac{1}{6}$，

故 $x+y+z=\dfrac{1}{2}$.

【反思】空间基底表示与平面基底表示方法类似，仍然是往与基底关联性较强的向量上化.

4．（2022·安徽芜湖模拟·★★★）如图，O 是 ΔABC 的重心，D 是边 BC 上一点，且 $\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则 $\dfrac{\lambda}{\mu}=$（　　）

（A）$-\dfrac{1}{5}$　　（B）$-\dfrac{1}{4}$　　（C）$\dfrac{1}{5}$　　（D）$\dfrac{1}{4}$



答案：A

解析：$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OC}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OC}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ ①，还需把 $\overrightarrow{OC}$ 用基底表示，可用重心分中线比例来完成，

如图，延长 CO 交 AB 于 E，则 E 为 AB 中点，

且 $\overrightarrow{CO}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CE}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

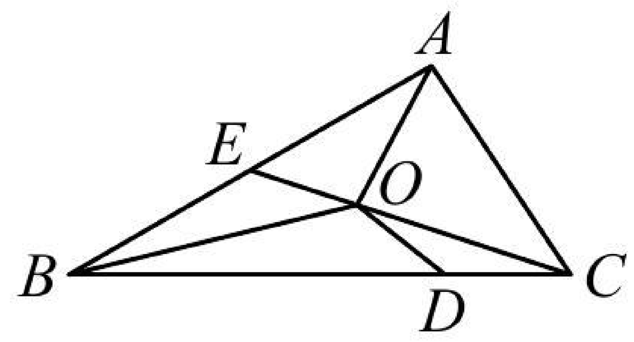
$=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，

所以 $\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{CO}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，代入①得：

$\overrightarrow{OD}=(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC})+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$，

由题意，$\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，

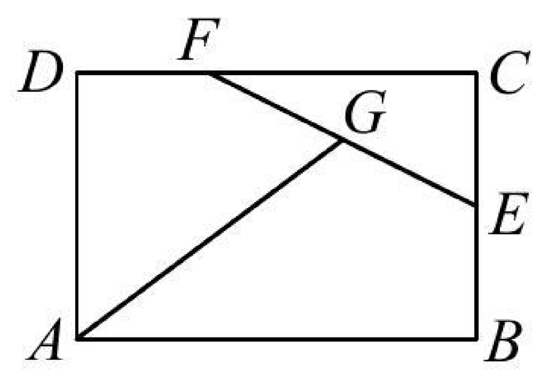
所以 $\lambda=-\frac{1}{12}$， $\mu=\frac{5}{12}$，故 $\frac{\lambda}{\mu}=-\frac{1}{5}$.



【反思】设 O 为 ΔABC 的重心，则 $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

5．（2022 • 湖南益阳模拟 • ★★）在如图所示的矩形 $ABCD$ 中，E，F 满足 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EC}$， $\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{FD}$，$G$ 为 EF 的中点，若 $\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，则 $\lambda\mu=$（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{2}{3}$　　（C）$\frac{3}{4}$　　（D）2



答案：A

解析：G 为 EF 中点，故容易把 $\overrightarrow{AG}$ 表示成 $\overrightarrow{AE}$ 和 $\overrightarrow{AF}$，再把 $\overrightarrow{AE}$ 和 $\overrightarrow{AF}$ 换成 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 即可，

由向量中线定理，$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$ ①，而 $\overrightarrow{AE}=$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$， $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，

代入①得： $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB})$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$，所以 $\lambda=\frac{2}{3}$， $\mu=\frac{3}{4}$，故 $\lambda\mu=\frac{1}{2}$.

6．（★★★）已知 ΔABC 内接于圆 O， $|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}|$，若 P 为线段 OC 的中点，则 $\overrightarrow{OP}=$（　　）

（A）$\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$　　（B）$\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$　　（C）$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$　　（D）$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

答案：C

解析：给出了模的关系，想到将其平方，

$|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}|\Rightarrow|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|^2=|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}|^2$，

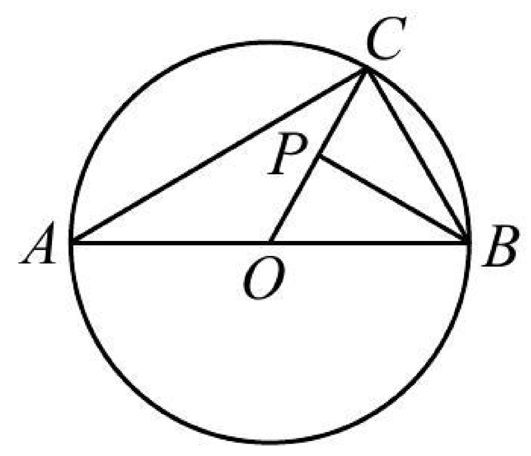
所以 $\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{CB}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{CB}^2-2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，

从而 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，故 $CA\perp CB$，

所以 AB 是圆 O 的直径，O 即为 AB 中点，如图，

故 $\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CO}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$

$=-\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.



7．（2023・陕西西安模拟・★★★）在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$，则 $\overrightarrow{BA}=$（　　）

（A）$\frac{6}{5}\overrightarrow{AF}-\frac{9}{5}\overrightarrow{CE}$　（B）$\frac{2}{5}\overrightarrow{AF}-\frac{3}{5}\overrightarrow{CE}$　（C）$\frac{6}{5}\overrightarrow{AF}+\frac{9}{5}\overrightarrow{CE}$　（D）$\frac{2}{5}\overrightarrow{AF}+\frac{3}{5}\overrightarrow{CE}$

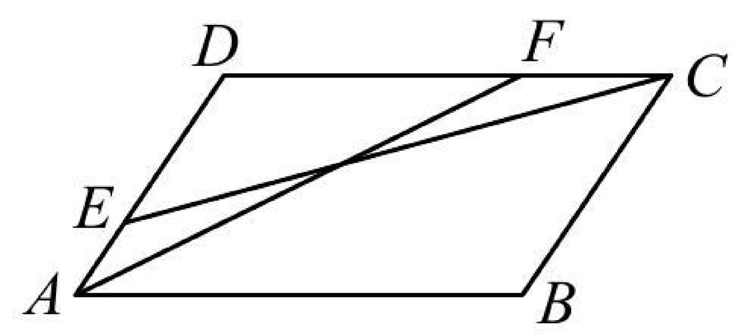
答案：C

解析：如图，直接用 $\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{CE}$ 表示 $\overrightarrow{BA}$ 较难，考虑换基底，注意到用 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 容易表示其它向量，故若设 $\overrightarrow{BA}=x\overrightarrow{AF}+y\overrightarrow{CE}$，则只要把 $\overrightarrow{AF}$ 和 $\overrightarrow{CE}$ 也用 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 表示，就能与 $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ 比较系数，求出 x，y，

由题意，$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=-\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，

设 $\overrightarrow{BA}=x\overrightarrow{AF}+y\overrightarrow{CE}$，则 $\overrightarrow{BA}=x(\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB})+y(-\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD})=(\frac{2x}{3}-y)\overrightarrow{AB}+(x-\frac{2y}{3})\overrightarrow{AD}$ ①，

又 $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$，与①对比可得 $\begin{cases}\frac{2x}{3}-y=-1\\x-\frac{2y}{3}=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x=\frac{6}{5}\\y=\frac{9}{5}\end{cases}$，所以 $\overrightarrow{BA}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AF}+\frac{9}{5}\overrightarrow{CE}$.



8．（2023・天津模拟改・★★★）已知 A，B，P 是直线 l 上不同的三点，点 O 在直线 l 外，若 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{AP}+(2m-3)\overrightarrow{OB}(m\in\mathbf{R})$，则 $m=$_____.

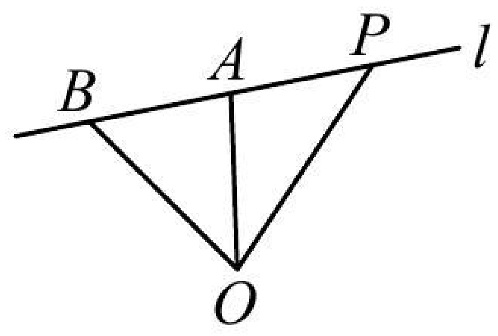
答案：2

解析：如图，注意到 A，B，P 共线，故我们将所给等式变形成 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$ 的形式，利用系数和结论即可构建方程求 m，只需将式中的 $\overrightarrow{AP}$ 拆成 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$，

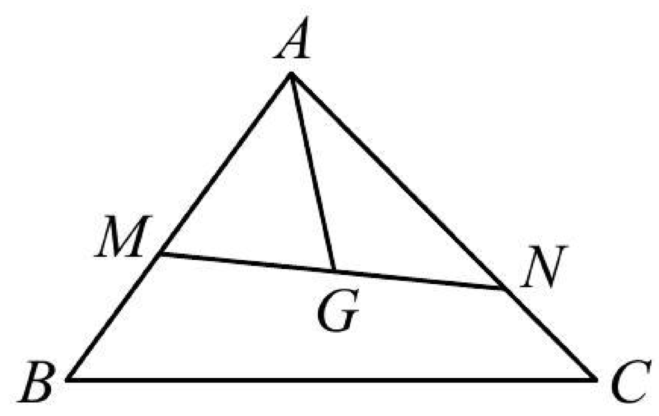
$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{AP}+(2m-3)\overrightarrow{OB}=m(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})+(2m-3)\overrightarrow{OB}$，

整理得：$\overrightarrow{OP}=\frac{m}{m-1}\overrightarrow{OA}+\frac{3-2m}{m-1}\overrightarrow{OB}$，

因为 A，B，P 共线，所以 $\frac{m}{m-1}+\frac{3-2m}{m-1}=1$，故 $m=2$.



9.（2022·重庆模拟改·★★★）如图，已知点 G 是 ΔABC 的重心，过点 G 作直线分别与 AB，AC 两边交于 M，N 两点（M，N 与 B，C 不重合），设 $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AC}=y\overrightarrow{AN}$，则 $x+y=$_____.



答案：3

解析：注意到 G 为重心，$\overrightarrow{AG}$ 易用 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 表示，结合已知又可化为用 $\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AN}$ 表示的结果，从而可由 M，G，N 三点共线找到 x，y 的关系，

如图，延长 AG 交 BC 于点 H，因为 G 是重心，所以 H 为 BC 的中点，且 $AG=\dfrac{2}{3}AH$，

所以 $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AH}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

又 $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AC}=y\overrightarrow{AN}$，所以 $\overrightarrow{AG}=\dfrac{x}{3}\overrightarrow{AM}+\dfrac{y}{3}\overrightarrow{AN}$，

结合 M，G，N 三点共线可得 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3}=1$，故 $x+y=3$.